



MatteLiST
MATEMATIKKSENTERET

FILTRET FORSKNING, FRA CAMBRIDGE MATHEMATICS
I SAMARBEID MED MATEMATIKKSENTERET

KAFFEPRAT:

HVORDAN KAN
ALGEBRAISK TENKNING
INTRODUSERES PÅ
EN HENSIKTSMESSIG
MÅTE?

OPPSUMMERING

- Algebra er vanskelig å definere, og ulike definisjoner vil avgjøre hvordan og når algebraisk tenkning bør introduseres for elever.
- Generaliserings-, omformings- og metanivåaktiviteter er mulige kategorier av algebraisk tenkning.
- Det kan være hensiktsmessig å introdusere algebraisk tenkning på lavere trinn, fordi yngre elever kan være flinkere til å tenke algebraisk enn tidligere antatt.
- Algebraisk tenkning kan innføres ved at man går fra konkrete eksempler til det generelle, eller omvendt.
- Å arbeide med algebraisk tenkning gjennom å utvikle elevenes forestilling om ekvivalens (likhet) er hensiktsmessig.
- Bruk av teknologi kan utvikle elevenes algebraiske tenkning ved å tilby flere kontekster og representasjoner

Algebraiske monsterstrukturer i tidlig barnelitteratur

(tilpasset fra Elliott et al., 2005)

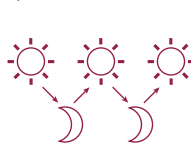
DLA*

	Man	=	1
	Tir	=	2
Naturlige tall	Ons	=	3
	Tor	=	4
	Fre	=	5
Brudd i mønsteret	Lør	=	10
	Søn	=	1

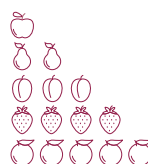
TWAOLWSAF**

Naturlige tall	Ol-f
	Ol-f-sp
	Ol-f-sp-b
	Ol-f-sp-b-ca
	Ol-f-sp-b-ca-do
	Ol-f-sp-b-ca-do-g
Trekantall	Ol-f-sp-b-ca-do-g-co
	Ol-f-sp-b-ca-do-g-co-h
	Ol-f-sp-b-ca-do-g-co-h

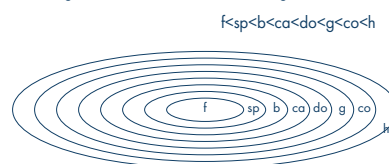
Syklisk



Trekantall



Delmengder



Rekkefølge

$f < sp < b < ca < do < g < co < h$

*Den lille larven Aldrimett av Eric Carle **There Was An Old Lady Who Swallowed A Fly av Simms Taback

1

Algebra er vanskelig å definere, og hvor tidlig det bør introduseres, avhenger av hvilken definisjon man legger til grunn. Det kan være bedre å spørre hvilke «ideer, logikker, teknikker og vaner» algebra omfatter, og deretter vurdere hvilken av dem som kan læres tidlig uten å miste «intellektuell integritet» og opprettholde en «sammenhengende helhet».¹ Sutherland (1997) definerer at algebra består av tre hovedområder: «generaliseringsaktiviteter (å finne og uttrykke algebraiske uttrykk og ligninger), omformingsaktiviteter (manipulering og forenkling av algebraiske uttrykk, løsning av ligninger, ekvivalens) og metanivåaktiviteter (ideer om bevis, matematisk struktur og problemløsning)». ² I de fleste læreplaner er algebra et eget område. Men i noen nyere forskningsbaserte tilnærminger, som RME, i både grunnskolen og i videregående skole, er det ingen separate kurs i algebra.³

IMPLIKASJONER: Algebra er vanskelig å definere, selv blant forskere i matematikk

Å definere hva man mener med *algebra*, påvirker hvordan og når algebraisk tenkning blir introdusert for elevene

En definisjon av algebraisk aktivitet beskriver generaliserings-, omformings- og metanivåaktiviteter

I mange lands læreplaner blir det ofte undervist i algebra separat fra andre områder i matematikk, men en del forskning tyder på at integrasjon er hensiktsmessig

“Ungdom som har mestret algebraiske begreper, har fått et utgangspunkt der de ser begreper om aritmetikk i et bredere perspektiv”

Vygotsky

“På 1990-tallet ble ‘enrolment in algebra’ karakterisert som ‘Den nye sivile rett’ av Robert Moses. Clinton-administrasjonen erklærte fullføring av et algebrakurs innen utgangen av åttende klasse som et nasjonalt mål”

Tom Loveless, Brown Center Chalkboard

2

En vanlig oppfatning er at det bør undervises i aritmetikk før algebra, men noe forskning viser at «selv barn i grunnskolen kan tenke algebraisk (...) og kan lykkes i å løse algebraiske problemer (...) tidlig introduisering av oppgaver som krever algebraisk tenkning kan løse problemer».⁴ Nyere forskning tyder på at tidlig introduisering av algebra «ikke bare er mulig, men nødvendig, og at yngre barn kan gjøre mye mer på dette området enn tidligere antatt», inkludert bruk av formelt språk.⁸ Å introdusere algebra «sent, brått og i relativ isolasjon» anses som lite hensiktsmessig.¹⁰

IMPLIKASJONER: Å introdusere algebraisk tenkning tidlig i matematikpensumet kan være hensiktsmessig

Yngre elever kan være flinkere til å tenke algebraisk enn tidligere antatt

3

Det er stort sett to måter å legge til rette for algebraisk tenkning på: fra det generelle til det konkrete (f.eks. Davydov, 1975)⁵ og fra det konkrete til det generelle. Denne siste tilnærmingen er ofte tatt inn i nye læreplaner, der «barn forventes å gjøre sine egne generaliseringer basert på å se flere eksempler på oppgaver med ulike tall»,⁶ som innebærer noen «betydelige justeringer i tenkningen».⁷ En tilnærming kan være å introdusere grunnskoleelever for ideen om variabel og kvasivariabel ved å vurdere hva som er konstant og hva som varierer i regneuttrykk.¹⁰ Teorier som antyder tidlig innføring av algebraisk tenkning via det generelle, fokuserer derimot ofte på tidlige oppfatninger av *sammenligning*. Det kan bidra til forståelse av for eksempel den kommutative egenskapen, uten behov for å «måle» eller definere de spesifikke mengdene som er involvert.⁸ Gattegno-Cuisenaire-metoden viser at svært små barn kan «mestre algebraiske uttrykk» ved å bruke fargede staver til å resonnerer rundt ekvivalens og proporsjoner, der «lengden på stavene ikke blir introdusert før forholdet mellom stavene er fullstendig utforsket symbolsk».⁹ En annen måte å beskrive disse to tilnærmingene på er å «tenke med de ukjente» kontra å «tenke med de kjente og jobbe fra disse til de ukjente».³

IMPLIKASJONER: Ulike teorier tyder på at algebraisk tenkning kan innføres ved å gå fra det generelle til det konkrete, eller omvendt. En foreslått tilnærming som begynner med det generelle, er å gå fra abstraksjon til kvantitet og deretter til tall, for eksempel ved hjelp av cuisenairstaver.

Hvis man begynner med det konkrete, foreslår forskning ofte å undersøke enkle aritmetiske egenskaper og trekke frem begrepet (kvasi-) variabler først.

4

Nyere forskning sier at det bør legges større vekt på «framveksten og utviklingen av elevenes forestillinger om ekvivalens» i stedet for bare å lære elevene hvordan de skal opprettholde ekvivalens. Man bør også gå bort fra kun å manipulere og omforme algebraiske uttrykk til å vurdere strukturer og sammenhenger.¹⁰ Det foreslås å arbeide med utviklingen av «algebraisk tenkning» – her definert som bevisst å inkludere generalisering og resonnering knyttet til generaliseringene – i motsetning til «undervisning og læring av spesifikke deler av algebrainnhold».¹¹ Ved hjelp av teknologi kan elevene arbeide med algebra i en rekke rike og meningsfylte sammenhenger, noe som kan bidra til å utvikle algebraisk tenkning. Bruk av teknologi kan også legge til rette for aktiviteter med flere representasjoner.¹⁰

IMPLIKASJONER: En tilnærming til algebraisk tenkning gjennom å utvikle elevenes forestillinger om ekvivalens er hensiktsmessig.

Det foreslås å legge vekt på en dynamisk utvikling av algebraisk tenkning, i stedet for algebra som isolert område.

Teknologi kan øke elevenes tilgang til rike kontekster for algebraisk tenkning og en rekke representasjoner.

REFERENCES

1. E. Paul Goldenberg, June Mark, and Al Cuoco Education Development Center, Inc. (EDC) [2010] *The Early Algebra of Little Kids*, Language, mathematics, and habits of mind.
2. Teaching and Learning Algebra Pre-19 [1995] Royal Society and JMC working group, Royal Society.
3. Sutherland, R. et al (2004) A Toolkit for Analysing Approaches to Algebra, in *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (eds Stacey, K., Chicks, H., & Kendal, M.) the 12th ICMI Study.
4. Lee, K. (2016) Mathematical Competence, Teaching, and Learning, *Journal of Numerical Cognition*, Vol 2, No. 1.
5. Davydov, V.V. (1975). Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. In L. P. Steffe, (Ed.), *Children's capacity for learning mathematics. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, Vol. VII [pp. 55–107]. Chicago: University of Chicago.
6. Dougherty, B. in Sutherland, R. et al (2004) A Toolkit for Analysing Approaches to Algebra, in *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (eds Stacey, K., Chicks, H., & Kendal, M.) the 12th ICMI Study.
7. Kieran, C. (2004) Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, Vol.8, No.1, 139–151.
8. Schmitau, J. (2005) The Development of Algebraic Thinking: A Vygotskian Perspective, *Analyses, ZDM* Vol. 37.
9. Benson, I., Cane, J. & Spencer, S. (2015) Getting started with early algebra, in *Primary Mathematics*, the Mathematical Association.
10. Kieran, C. (2004) The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities in, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (eds Stacey, K., Chicks, H., & Kendal, M.) the 12th ICMI Study.
11. Lins, R., & Kaput, J. (2004) The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field in *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (eds Stacey, K., Chicks, H., & Kendal, M.) the 12th ICMI Study.