23. UTGAVE OKTOBER 2019

CAMBRIDGE Mathematics

MatteLIST MATEMATIKKSENTERET

ESPRESSO DOPPIO

FILTRERT FORSKNING, FRA CAMBRIDGE MATHEMATICS

I SAMARBEID MED MATEMATIKKSENTERET

KAFFEPRAT:

HVA SIER FORSKNING ER VIKTIG NÅR ELEVENE SKAL UTVIKLE FORSTÅELSE FOR BEGREPET GJENNOMSNITT?

OPPSUMMERING

- Å la elevene tidlig få utvikle uformelle erfaringer med gjennomsnitt vil kunne hjelpe dem til å utvikle bedre begrepsmessig forståelse og evne til å resonnere i stedet for bare å memorere en prosedyre
- Gjennomsnitt er et komplekst begrep, som verken bør forenkles eller undervises i formelt for tidlig. Elevene kan oppleve begrepet mindre intuitivt enn median og typetall
- Det er viktig at gjennomsnitt vurderes sammen med andre mål, for eksempel form og fordeling, og ses i en større sammenheng med statistiske begreper
- Det finnes flere modeller som kan styrke begrepsforståelsen for gjennomsnitt. Elevene bør få arbeide med balansepunkt, rettferdig fordeling og forholdsmodeller, der rettferdig fordeling er det enkleste og kan fungere som en hensiktsmessig oppstart
- Verdier som 0 i datasettet og dataenes kontekst er viktige å vurdere når gjennomsnittet beregnes
- Gjennomsnitt er et eksempel på en abstrakt matematisk konstruksjon, og elevene må få tid til å utforske det grundig
- Elevene bør få muligheter til å oppdage at gjennomsnitt kan brukes til å sammenligne datasett av ulike størrelser

EN HELHETLIG FORSTÅELSE AV BEGREPET GJENNOMSNITT

Gjennomsnittet

- Gjennomsnittet ligger i størrelsesorden et sted mellom største og minste verdi i datasettet
- Avstanden mellom gjennomsnittet og hvert av de tallene som er mindre, er i sum like stor som avstanden mellom gjennomsnittet og hvert av de tallene som er større
- Gjennomsnittet påvirkes av alle verdiene i datasettet
- Gjennomsnittet trenger ikke å sammenfalle med noen av verdiene som ble summert
- Gjennomsnittet kan gjerne bli en brøk som ikke samsvarer med skrivemåten for de andre verdiene
- Hvis verdien 0 finnes i datasettet, en eller flere ganger, må den registreres på lik linje med de andre verdiene
- Gjennomsnittsverdien er representativ for de tallverdiene den ble regnet ut fra

Hentet fra Strauss & Bichler (1988)

1

Gjennomsnitt er et komplekst begrep som kan oppleves mindre intuitivt for elever enn median og typetall,[1] og elevene tilbys sjelden en uformell og intuitiv tilnærming i forkant av den formelle innlæringen av begrepet.[2] Læreplaner i matematikk tar for seg gjennomsnittsberegninger bare som en enkel summering av tallverdier eller som en plassering i en fordeling,[1] i stedet for å tilby arbeid med ulike modeller, som balansepunkt, rettferdig fordeling eller hvor mye hver person i en gruppe bør få. Elevene vil tjene på at erfaringene knyttet til gjennomsnitt er mer utforskende og mindre teoristyrt.[3,5] Å møte gjennomsnitt kun som algoritme eller formel som skal memoreres, kan føre til kortslutning i elevenes argumentasjon.[2,4]

IMPLIKASJONER: Gjennomsnittsbegrepet er komplekst og kan føles mindre intuitivt for elever enn median og typetall. I oppgaver blir gjennomsnitt ofte forenklet til en summering av verdier eller plassering i en fordeling

Å la elevene utforske og resonnere omkring gjennomsnitt kan hjelpe dem til å utvikle en bedre begrepsmessig forståelse og evne til argumentasjon

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS & ASSESSMENT

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE Faculty of Mathematics

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE Faculty of Education

2

Forskning viser at innlæring av gjennomsnitt har satt søkelys på elevenes forståelse av sentralmål uten at variasjonen i datasettet er vurdert.[5] Siden gjennomsnittet er bare en av flere muligheter til å beskrive datasettet,[6] blir det også viktig å vurdere form og fordeling sammen med gjennomsnittet.[1] På samme måte som andre statistiske mål fanger gjennomsnittet gruppeegenskaper ved datasettet, og det blir tydeligere jo flere data som blir innhentet. Det er viktig å se på gjennomsnittet som en del av totalbildet. Statistikere ser på gruppeegenskaper som median og gjennomsnitt som stabile egenskaper til et variabelt system, og egenskapene blir enda tydeligere når de ses samlet.[1] Fordelingen i datasettet bør vurderes sammen med gjennomsnittet for å utforske om gjennomsnittet er et fornuftig eller passende mål (f.eks. når datasettet ikke er symmetrisk).

IMPLIKASJONER: Det er viktig at elevene betrakter gjennomsnittet som ett av flere mål, sammen med form og fordeling

Å plassere en gjennomsnittsmåling i en større sammenheng av statistisk usikkerhet gir elevene mulighet til å se på det som en del av et verktøysett, uten å overfokusere på gjennomsnitt

Det er viktig å utfordre elevene på om gjennomsnitt er det beste målet. Ved å sikre at de vurderer andre egenskaper, for eksempel symmetriegenskapene til et datamateriale, får de utviklet forståelse av sentralmål

3

Det er mange modeller som kan hjelpe elevene til å forstå begrepet gjennomsnitt. Det kan bli modellert som et matematisk balansepunkt, altså som en indikator for et senter for å kunne summere, sammenligne og beskrive datasett. Ideen om at å identifisere gjennomsnittet handler om å minimalisere avstanden til de andre tallverdiene, spesielt når datasettet ikke er symmetrisk, er likevel viktig for å få en god forståelse av begrepet gjennomsnitt.[10] Ideen om balansepunkt handler også om en form for erstatning, ved at man først tar en bestemt tallverdi og så multipliserer opp.[7] En annen måte å modellere gjennomsnitt på er med en rettferdig fordeling-modell, som kan være mer effektiv for yngre elever.[2] En annen nyttig modell for gjennomsnitt går ut på å tenke på gjennomsnittet som det motsatte av å multiplisere antall verdier i datasettet med en bestemt tallverdi for å få en totalsum. Det tillater også elevene å forbinde gjennomsnitt med divisjon, ved å tenke på det som et «per en»-bidrag til hele datamaterialet.[13] En viktig del av denne ideen er å betrakte 0-verdiene hvis de opptrer i datasettet, noe som kan være et av de mest krevende aspektene å forstå ved begrepet gjennomsnitt (se infografikken).[8] Også det å betrakte og identifisere verdier som avviker stort fra de andre, er viktig for å forstå begrepet,[9] noe som betyr at det er viktig å forstå konteksten.[10]

IMPLIKASJONER: Å presentere flere ulike modeller for gjennomsnitt for elevene, som balansepunkt, rettferdig fordeling eller forholdsmodell, vil gi dem muligheter til å utvikle sin begrepsmessige forståelse og mestre kompleksiteten knyttet til begrepet

For yngre elever kan det være naturlig å begynne med rettferdig fordeling-modellen

Elevene bør oppdage viktigheten av verdien 0 i et datasett, og erfare betydningen av konteksten der gjennomsnittet beregnes

4

Selv om utregningene som trengs for å beregne gjennomsnittet ikke nødvendigvis er krevende, er det en matematisk konstruksjon som uttrykker et forhold, og som dermed krever et visst abstraksjonsnivå for å bli forstått. Elever i alderen 10–14 år har ofte problemer med å tilegne seg alle egenskapene.[10] En forestilling om gjennomsnitt bør også være multiplikativ og dermed tillate oss å sammenligne datasett som ikke nødvendigvis er like store. Gjennomsnittet som indikator er ikke påvirket av gruppestørrelsen.[11, 12] Begrepet vektet *gjennomsnitt* kan være spesielt vanskelig å forstå for elevene.[10]

IMPLIKASJONER: Å oppdage nytten av gjennomsnittet for å sammenligne datasett av ulik størrelse gir elevene anledning til å vurdere bruksområdet, men også dets begrensninger

Begrepet gjennomsnitt kan være den første matematiske konstruksjonen som elevene møter. Derfor trenger de tid til å utforske det grundig

"Selv om de fleste kjenner en prosedyre for å regne ut gjennomsnittet av et sett med tallverdier, er ikke matematikken som ligger bak synlig"

Mokros & Russell, 1995

"Gjennomsnittsverdien kan ofte være et godt utgangspunkt for videre beregning, for eksempel å estimere hva som skjer hvis kostnader forandres. Hvis vi ønsker å regne ut hva det vil koste å gi alle ansatte i en bedrift 10 % økning i timelønn, kan gjennomsnittlig timelønn benyttes i utregningen, der man til slutt multipliserer med antall ansatte"

House of Commons Research Briefing, 2007

Lucy Rycroft-Smith & Darren Macey, 2019. Norsk oversettelse: Jens Arne Meistad, 2021

REFERENCES

1. Konold, C. & Pollatsek, A. (2004). Conceptualizing An Average As A Stable Feature of A Noisy Process, in Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (eds). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking,* 169-199.
2. Marnich, M. A. (2008). *A Knowledge Structure for the Arithmetic Mean: Relationships Between Statistical Conceptualizations and Mathematical Concepts* (University of Pittsburgh).
3. Tukey, J. W. (1977). *Exploratory Data Analysis.* Addison-Wesley Publishing Company.
4. Cai, J. (1998). Exploring Students' Conceptual Understanding of the Averaging Algorithm. *School Science and Mathematics,* 98(2), 93–98.
5. Shaughnessy, J. M., Watson, J. M. Moritz, J. B. Reading, C. (1999). *School mathematics students' acknowledgment of statistical variation: There's more to life than centers.* Paper presented at the Research Pre-session of the 77th Annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics.
6. Biehler (1994). *Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes - Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis?* Revised and extended version of a paper presented at the Fourth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 4), Marrakech, Morocco, 25-30 July 1994 (17).
7. Bakker, A. (2003). The Early History of Average Values and Implications for Education. *Journal of Statistics Education,11*(1).
8. Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The Development of Children's Concepts of the Arithmetic Average. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 64–80.
9. García Cruz, J. A., & Garrett, A. J. (2008). Understanding the arithmetic mean: A study with secondary and university students. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 12*(1), 49–66.
10. Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's Concepts of Average and Representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 20–39.
11. Saldanha, L., & Thompson, P. (2002). Conceptions of Sample and Their Relationship to Statistical Inference. *Educational Studies in Mathematics, 51*(3), 257–270.
12. Cortina, J. L. (2002). Developing instructional conjectures about how to support students' understanding of the arithmetic mean as a ratio. *International Conference on Teaching Statistics, 6.*

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS & ASSESSMENT

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE
Faculty of Mathematics

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE
Faculty of Education