25. UTGAVE NOVEMBER 2019

CAMBRIDGE Mathematics

MatteLIST MATEMATIKKSENTERET

ESPRESSO DOPPIO

FILTRERT FORSKNING, FRA CAMBRIDGE MATHEMATICS

I SAMARBEID MED MATEMATIKKSENTERET

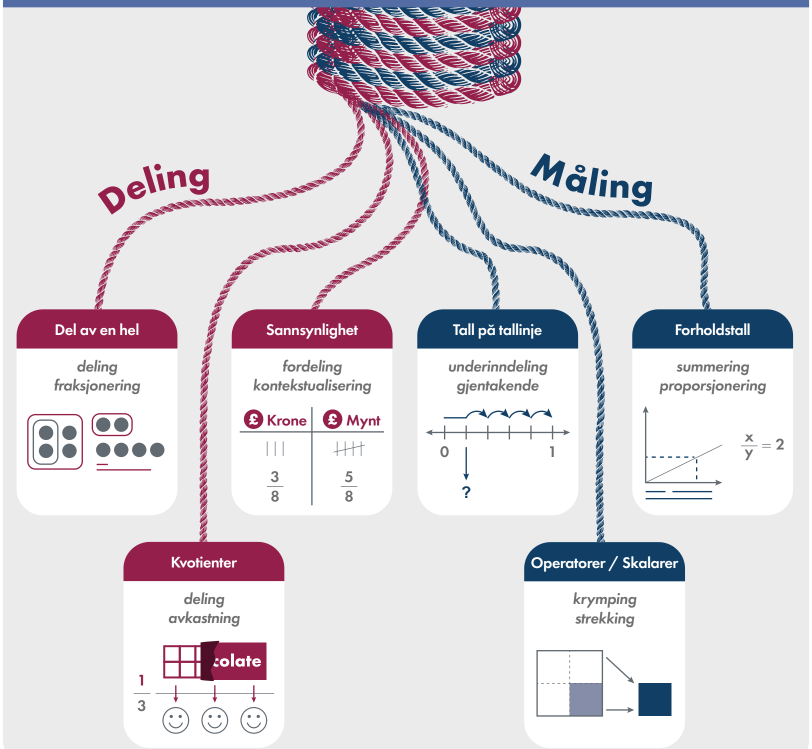
KAFFEPRAT:

EFFEKTFULLE MÅTER Å INTRODUSERE BRØK PÅ. HVA SIER FORSKNINGEN?

OPPSUMMERING

- Å se på brøk som et sett av sammenflettede begreper som omfatter både deling og måling, kan øke elevenes begrepsforståelse
- Å betrakte brøker som sammensatte og abstrakte ideer, kan bidra til å utvide elevenes forståelse, fra naturlige tall til reelle tall
- Tidlig forståelse av brøk støttes av arbeid med rettferdig deling, som utgjør deler av divisjonsbegrepet, og kan også øke telleferdigheten
- Det er viktig å fokusere på en halv som en viktig referansestørrelse, og at å dele i like mengder vanligvis er det enkleste. Sirkelmodeller er spesielt vanskelige
- Tallinja er en viktig representasjon for å utvikle forståelse av brøk, men flere og varierte representasjoner er også viktige
- Å utforske brøk med tanke på gruppering og referanseenhet er en viktig del av arbeidet mot å forstå brøk
- Elever bør få muligheten til å se brøker som relative verdier og som abstrakte ideer som kommer til syne på ulike, men likeverdige måter

BRØK
Et sett av sammenflettede begrep



1

Brøker er komplekse og kan ha flere betydninger.[1] Manglende forståelse av de ulike betydningene kan være et betydelig hinder for barns matematiske utvikling.[2] «Evnen til å håndtere brøk kommer litt senere enn evnen til å håndtere hele tall, men begge er til stede på et eller annet nivå ved fireårsalderen.»[1] Å arbeide med brøk innebærer en viktig endring i måten å tenke på, som en del av prosessen med å utvikle tallforståelsen fra naturlige tall til reelle tall.[3] Elever må kunne utvide sin forståelse av brøk, fra å tenke på spesifikke tilfeller av brøker (med kobling til sterke visuelle, memorerte bilder, som fargelagte halvsirkler)[4] til å forstå brøkbegrepet i en mer helhetlig og abstrakt forstand.[5] Elever drar nytte av å møte brøker i sammenheng med, og knyttet sammen med, deling og måling, da de ikke alltid overfører forståelse fra den ene situasjonen til den andre.[6]

IMPLIKASJONER: Dersom elevene ser brøker som sett av sammenflettede begreper, med flere bruksområder og modeller, kan de kanskje mestre kompleksiteten bedre

Brøk er et nøkkelbegrep i arbeidet med å utvide barns forståelse av tall, fra naturlige til reelle tall

Akkurat som med naturlige tall bør oppfatningen av brøk som spesifikke tilfeller (med visuelle representasjoner) gå over i en abstrakt, sammensatt og mer generell oppfatning

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS & ASSESSMENT

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE Faculty of Mathematics

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE Faculty of Education

2

De første stegene mot forståelse av brøk omfatter rettferdig deling og sammenligning og det å avgjøre hvilke av to størrelser som er størst. Mange førskolebarn mestrer å dele mengder i like store underenheter.[7] Gjennom denne (rettferdige) delingen kommer divisjon kognitivt før multiplikasjon.[7] Lærere kan gjennomføre delingsaktiviteter med barn, selv før de har blitt trygge på telling, fordi barn kan håndtere fordeling eller ta i bruk visuelle mentale strategier veldig tidlig.

IMPLIKASJONER: Tidlig forståelse av brøk støttes av arbeid med rettferdig deling, som danner deler av divisjonsbegrepet

Barn kan veldig tidlig bruke fordeling eller andre strategier for å dele, og vurdere hva som er «rettferdig», og det kan øke telleferdigheten

Det er viktig å fokusere på en halv som referansestørrelse og å erfare at deling i like mengder vanligvis er enklere enn å dele i ulike mengder

Barn kan synes det er vanskelig å bruke sirkulære former til å modellere deling. Variert bruk av representasjoner kan gi mer fleksibel tenking

3

Elever som forstår brøk som deler, mangler ofte forståelse av dem som størrelser (tall med en bestemt størrelse).[6] Å utvikle elevenes forestilling om en halv (og derfra til andre brøker) fra en kvalitativ (estimering) til en kvantitativ forstand (telling), er et viktig mål.[3] Tallinja er en god modell når brøk skal representeres, fordi den kan brukes til både inndeling og gjentakelse, og fordi den kan sette fokus på symbolske aspekter, siden den krever minst to referansepunkter for å gi mening numerisk.[8] Tallinja kan også støtte utviklingen av forståelsen av brøker som operatorer, hvor for eksempel ¾ kan tolkes som 3 x (1/4 av en enhet) eller ¼ x (3 enheter).[9]

IMPLIKASJONER: Tallinja er en god modell i utviklingen av brøkforståelse

Måling er en nyttig aktivitet for å utvikle forståelse av brøker fra estimering av mengde til telling

Det er viktig å bruke varierte representasjoner for å hjelpe til med å forene ideer om brøker som deler og som størrelser

4

Brøker er sterkt knyttet til enheter: «Hvor mange eller hvor mye som menes med ½ er tvetydig, med mindre vi vet (blant annet) hvilken helhet brøken representerer. Normering og bruk av enheter er avgjørende for begreper innenfor brøk.»[10] Brøker er annerledes enn naturlige tall, siden de kan være relative og ikke ha en fast verdi: Den samme brøken kan referere til forskjellige mengder, og forskjellige brøker kan være likeverdige.[11] Å utforske disse ideene er begynnelsen på en solid forståelse av proporsjonal resonnering.[12]

IMPLIKASJONER: Elevene bør utforske ideer om enheter (gruppering) og normering (navngi referanseenheten) som en del av opplæringen i brøk

Å få mulighet til å utforske brøker som relative verdier som uttrykkes på forskjellige, men likeverdige måter (proporsjonal resonnering), kan bidra til dypere forståelse og legge grunnlaget for videre læring av matematikk

"Den kompliserte semantikken til brøker er delvis en konsekvens av den sammensatte strukturen i brøker. Hvordan kan betydningen av 2 kombinert med betydningen av 3 skape en betydning av 2/3?"

Ball, 1993

"I begynneropplæringen med brøk er elevenes erfaringer ofte begrenset til pizzaer, klisterlapper og sjokolade! Har barna like mye erfaring med objekter, former og mengder, og har de erfaring med at den hele er noe annet enn én?"

NRICH, 2013

Lucy Rycroft-Smith, Tabitha Gould & Nicky Rushton, 2019. Norsk oversettelse: Harald Sande, 2021

REFERENCES

1. Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop* (pp. 101–144). Columbus: ERIC/SMEAC.
2. Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis—Emphasis on the Operator Construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romber (Eds). *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13–47). Routledge.
3. Hunting, R. P. (1999). *Rational Number Learning in the Early Years: What is Possible?*
4. Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romber (Eds). *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 157–195). Routledge.
5. van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6.* Rotterdam: Sense Publishers.
6. Nunes, T., & Bryant, P. (2009). Understanding rational numbers and intensive quantities. Paper 3 in *Key understandings in mathematics learning*. London: The Nuffield Foundation.
7. Confrey, J., & Maloney, A. (2010). The construction, refinement, and early validation of the equipartitioning learning trajectory. *Proceedings of the 9th International Conference of the Learning Sciences-Volume 1*, 968–975.
8. Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying Fractions on Number Lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(3), 215–232.
9. Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 293–316.
10. Lamon, S. (1994). Ratio and Proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. In G. Harel and J. Confrey (Eds). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics.* New York: SUNY Press.
11. Nunes, T., et al. (2006). *Fractions: difficult but crucial in mathematics learning*. Teaching and Learning Research Programme Research Briefing no.13.
12. Lamon, S. J. (2011). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers.* Taylor & Francis Group.

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS & ASSESSMENT

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE
Faculty of Mathematics

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE
Faculty of Education