



## KAFFEPRAT:

HVA SIER FORSKNING  
OM UTVIKLING AV  
PROPORSJONAL  
RESONNERING I  
MATEMATIKK?

### OPPSUMMERING

- Proporsjonal resonnering innebærer forståelse av proporsjonalitet – endring og kontinuitet i relasjoner – og skal integreres og kobles sammen på tvers av matematiske områder
- Det anbefales å gi elevene ulike erfaringer med proporsjonal resonnering over flere år, parallelt med utviklingen av tallforståelsen deres
- Proporsjonal resonnering er mer enn bare å finne manglende verdier, det er et problemløsningsverktøy som legger et viktig grunnlag for algebraisk tenking
- For tidlig memorering av regler vil sannsynligvis hemme utviklingen av proporsjonal resonnering
- Elevene bør ha muligheter til å utforske, beskrive og representere problemer knyttet til forhold før de beveger seg mot symboler og algebra
- Elevene bør oppmuntres til å utforske ulike områder av matematikk (inkludert stigning, skalering, sannsynlighet, vektorer og priser) ved å bruke proporsjonal resonnering som verktøy for å finne sammenhenger og likheter

## To mulige visuelle representasjoner av proporsjonal resonnering



Tante lager en krydret suppe til 11 personer. Hun bruker 25 mL tabaskosaus.

Berit lager den samme suppen til 33 personer.

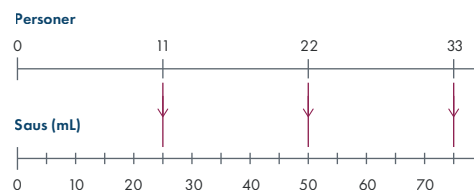
Hvor mye tabaskosaus skal Berit bruke?

→ Utforske multiplikative relasjoner innenfor et måleområde (skalarrelasjon)

#### FORHOLDSTABELL

Antall personer	11	22	33
Saus (mL)	25	50	75

#### DOBBEL TALLINJE



↓  
Utforske multiplikative relasjoner på tvers av et måleområde (funksjonsrelasjon)

Hentet fra Küchemann et al. (2014)<sup>15</sup>

1

Proporsjonal resonnering – kategorisering, forståelse og manipulering av multiplikative strukturer – er kjernen i all matematikklæring.<sup>3</sup> Proporsjonal resonnering er å bruke og forstå proporsjonalitet, med andre ord «å kunne sammenligne mellom enheter i multiplikative strukturer».<sup>4</sup> Proporsjonalitet kan være statisk (par med verdier, brøker eller forhold) eller dynamisk (lineære funksjoner eller endringshastigheter),<sup>5</sup> og det er viktig å utforske begge fleksibelt. Det innebærer å erkjenne forskjellen mellom absolutt og relativ endring og forståelse av at forholdet mellom mengdene er konstant,<sup>6</sup> samt å vurdere om forutsetningene er hensiktsmessige når man beskriver et slikt forhold.<sup>7</sup> Det er en sentral sammenheng mellom områdene tall, geometri, sannsynlighet og statistikk, og proporsjonal resonnering bør derfor integreres i alle.<sup>8</sup> Evnen til proporsjonal resonnering utvikler seg over tid og krever et bredt spekter av erfaringer over flere år, slik at elevene utvikler gode ferdigheter.<sup>7</sup>

**IMPLIKASJONER:** Proporsjonal resonnering har stor betydning for læring i matematikk, med tanke på forståelse av endring og kontinuitet

Proporsjonal resonnering bør integreres og kobles sammen på tvers av matematiske områder, som tall, geometri, sannsynlighet og statistikk

Elevene bør ha et bredt spekter av erfaringer med proporsjonal resonnering over flere år for å utvikle ferdigheter i å bruke det

2

Utvikling av proporsjonal resonnering henger tett sammen med forståelsen av rasjonale tall,<sup>9</sup> og er forankret i tidlige (førskole-) erfaringer,<sup>10</sup> som å sammenligne, måle, bygge opp, dele, vokse og krympe. Det er også avhengig av forståelse av å dele (dele i like deler) og gruppere (se flere like deler som en enhet). Å utforske problemer gjennom proporsjonal resonnering gir elevene mentale strukturer å tenke ut fra, og kan være til hjelp for å forstå sammenhenger. Det kan bidra til å forhindre at elevene tror at utregningene «bare blir sånn».<sup>7</sup> Nøyte utvalgte tall og verdier som brukes i problemer, kan legge opp til multiplikatv tenking. Lærere har en tendens til å overtolke elevenes svar og gå ut fra at de har forstått proporsjonalitet på grunnlag av et riktig svar.<sup>11</sup> For tidlig bruk av «huskereglene» kan hindre utvikling av proporsjonal resonnering, fordi elevene kan anvende reglene uten å tenke.<sup>4</sup> Undervisning i proporsjonal resonnering er ofte begrenset til å huske prosedyrer for å løse regnestykker.<sup>7</sup>

**IMPLIKASJONER:** Ved å bygge på deling og gruppering kan små barn tidlig utforske proporsjonale strukturer i forbindelse med utvikling av tallforståelse

Vellykket proporsjonal resonnering vises ikke nødvendigvis i ett enkelt riktig svar

Memorering av regler kan oppmuntre elevene til å anvende regler uten å tenke, og hemmer derfor utviklingen av proporsjonal resonnering

3

Proporsjonal resonnering, i betydningen «tidlig vektlegging av å utvikle barns evne til å tenke på, resonnerer om og manipulere komplekse ideer og relasjoner», vil sannsynligvis gjøre det mulig for elevene å forstå algebra bedre.<sup>7</sup> Proporsjonal og algebraisk resonnering er naturlig knyttet sammen, særlig ettersom modellen for en lineær funksjon bygger på å gjenkjenne et proporsjonalt forhold.<sup>12</sup> Elevene bør få mulighet til å utforske innenfor et måleområde (skalarrelasjon) og på tvers av måleområder (funksjonsrelasjon), se infografikk.<sup>1</sup>

**IMPLIKASJONER:** Proporsjonal resonnering er en sentral del av grunnlaget for algebraisk tenking, og de to bør knyttes sammen for elevene

4

I arbeid med proporsjonale problemer bør elevene få muligheter til å utforske og uttrykke problemer ved hjelp av konkrete og visuelle representasjoner, før de prøver å modellere situasjonen ved hjelp av symboler eller formelle metoder.<sup>13</sup> Det er viktig å be elevene jevnlig om å identifisere konstante størrelser og variabler, la dem beskrive muntlig hvordan forholdet mellom størrelsene endrer seg, modellere sammenhengene mentalt og tegne diagrammer.<sup>14</sup> Å la elevene konsekvent arbeide med proporsjonale relasjoner på tvers av ulike områder, som stigningstall, skalering, sannsynlighet, vektorer og priser, er nyttig.<sup>8,10,14</sup>

**IMPLIKASJONER:** Elevene bør få muligheter til å uttrykke proporsjonale problemer og størrelser ved hjelp av ulike representasjoner før de etter hvert tar i bruk symboler og algebra

Jevnlige muligheter for elevene til å beskrive og skissere størrelser som endrer seg i forhold til hverandre på ulike måter, er et viktig trekk ved proporsjonal resonnering

Elevene bør oppfordres til å utforske ulike områder av matematikken (inkludert stigningstall, skalering, sannsynlighet, vektorer og priser) og se sammenhenger og likheter ved å bruke proporsjonal resonnering

“Multiplikatv tenking står sentralt ikke bare i matematikk, men også i anvendelse av matematikk i arbeid og hverdag, spesielt ved bruk av prosent og proporsjoner”<sup>1</sup>

Hodgen et al, 2014

“For å utvikle barns tallforståelse fullt ut må vi sørge for at de får rike erfaringer med operasjoner med tall og forhold så vel som mengder”<sup>2</sup>

Askew, 2011

Copyright © 2022 Cambridge Mathematics

Lucy Rycroft-Smith, Darren Macey, Rachael Horsman & Tabitha Gould, 2020. Norsk oversettelse: Astrid Bondø, 2021

## REFERENCES

- Hodgen, J., Coe, R., Brown, M., & Küchemann, D. (2014). Improving students' understanding of algebra and multiplicative reasoning: Did the ICCAMS intervention work? *Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education*. BCME 8.
- Askew, M. (2011, September 28). Reasoning: Number as relations. Mike Askew: Transforming Primary Maths.
- Brown, M., Küchemann, D., & Hodgen, J. (2014). The struggle to achieve multiplicative reasoning: 11–14. In *Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education* (pp. 49–56).
- Cetin, H., & Ertekin, E. (2011). The relationship between eighth grade primary school students' proportional reasoning skills and success in solving equations. *International Journal of Instruction*, 4(1), 47–62.
- Lundberg, A. L. V., & Kilhamn, C. (2016). Transposition of knowledge: Encountering proportionality in an algebra task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(3), 559–579.
- Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. (2013). Ratio and proportional reasoning. In *Key ideas in teaching mathematics* (pp. 41–68). Oxford University Press.
- Smith, J. P., & Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95–132). Erlbaum.
- Ayan, R., & Isiksal-Bostan, M. (2019). Middle school students' proportional reasoning in real life contexts in the domain of geometry and measurement. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(1), 65–81.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a framework for research. In Lester, F. K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629–668). Information Age Publishing.
- Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 127–155.
- Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually: part 1: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(3), 279–303.
- Cramer, K., & Post, T. (1993) Proportional reasoning. *The Mathematics Teacher* 86(5), 404–407.
- Langrall, C. W., & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(4), 254–261.
- Lim, K. H. (2009). Burning the candle at just one end. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(8), 492–500.
- Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2014). The use of alternative double number lines as models of ratio tasks and as models for ratio relations and scaling. *Proceedings of 8th British Congress of Mathematics Education*. 8th British Congress of Mathematics Education.