34. UTGAVE NOVEMBER 2020

CAMBRIDGE Mathematics

ESPRESSO

DOPPIO

MatteLIST MATEMATIKKSENTERET

FILTRERT FORSKNING, FRA CAMBRIDGE MATHEMATICS

I SAMARBEID MED MATEMATIKKSENTERET

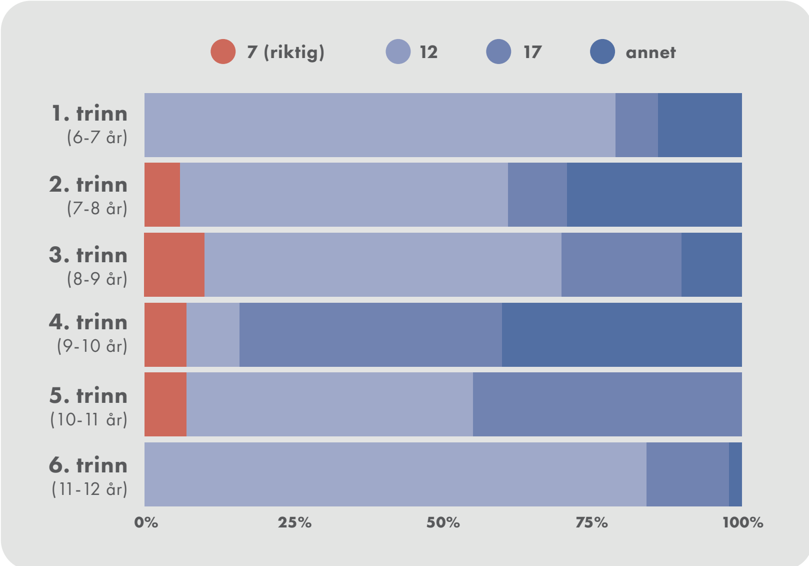
KAFFEPRAT:

HVA SIER FORSKNING OM LÆRING OG UNDERVISNING AV LIKHETSTEGNET?

OPPSUMMERT

- Mange elever i norsk skole tror likhetstegnet betyr «her kommer svaret». Å lese likhetstegnet som «blir» eller «er» kan føre til et operasjonelt syn på ekvivalens og likhetstegnet og bygge opp under slike misoppfatninger.
- Likhetstegnet har flere bruksområder enn å antyde at det skal utføres en beregning.
- Elever bør møte ulike egenskaper ved ekvivalens i sin bruk av likhetstegnet for å bli trygg på de ulike bruksområdene.
- Å oppmuntre elever til å utvikle et relasjonelt syn på likhetstegnet (gjennom eksplisitt instruksjon) hjelper dem med å utvikle matematisk intuisjon rundt rekkefølge, endring og ekvivalens, og kan forhindre noen misoppfatninger.
- Å lese likhetstegnet som «er det samme som» kan hjelpe elevene med å utvikle et relasjonelt syn på bruken av tegnet.
- Å utvikle en sofistikert forståelse for likhetstegnet, som inkluderer et relasjonelt syn, er grunnleggende for god forståelse i algebra.

Løsninger på oppgaven $8 + 4 = \square + 5$ gitt av amerikanske elever i ulike aldre



Tilpasset fra Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232–236.

1

Likhetstegnet blir ofte introdusert tidlig for elever, gjerne i 5-7 års alder[1]. Det er vurdert som uproblematisk å introdusere likhetstegnet tidlig og elevene utforsker sjelden ekvivalens eksplisitt i den forbindelse[2]. Forskning finner at mange elever på alle klassetrinn ikke har utviklet en adekvat forståelse av meningen med likhetstegnet[3]. Uten en grundig forståelse av likhetstegnet vil det bli vanskelig, for ikke å si umulig, å skape mening i hvordan det matematiske symbolspråket fungerer og hva det kan uttrykke[4]. Ekvivalens har tre grunnleggende egenskaper: Relasjonen er refleksiv (det vil si at a=a eller 8=8), relasjonen er symmetrisk (det vil si at hvis a=5 så er 5=a), og den transitiv (det vil si at hvis a=b og b=c, så er a=c). Elever bør møte alle de tre egenskapene i sin utforsking av ekvivalens og likhetstegnet[5]. Elevenes prestasjoner i matematikk en nært knyttet til deres forståelse av symbolspråket. «Misbruk» av likhetstegnet kan føre til ulike misoppfatninger som kan bli vedvarende[1].

IMPLIKASJONER: Å bruke «er det samme som» i stedet for «er» eller «blir» kan være med på å minne lærere og elever på de ulike betydningene av likhetstegnet

Elever bør få muligheter til å møte alle de tre grunnleggende egenskapene ved ekvivalens i sin bruk av likhetstegnet; både den refleksive, den symmetriske og den transitive egenskapen

Tydeligere oppmerksomhet på utvikling av elevenes forståelse av likhetstegnet helt fra den første introduksjonen, kan være med på å forhindre en bruk som kan bli en barriere for videre læring

2

Det vanligste synet på likhetstegnet er at det er som en instruks om at det nå skal utføres en beregning. Dette kalles et operasjonelt syn og tegnet leses ofte som «blir» eller «er». Det viser seg at et slikt syn, hvis det utvikles i isolasjon, kan være en kilde til misoppfatninger som senere må «avlæres»[6]. For eksempel er det mange som strever med å vurdere utsagn som $4 = 4$ eller $13 - 0 = 14 - 1$. Et operasjonelt syn kan også føre til at elever mener det ikke er lov til å skrive summen til venstre for likhetstegnet i og med at likhetstegnet betyr at svaret skal komme etterpå. En slik forståelse av tegnet kan føre til vanskeligheter når elevene etter hvert skal manipulere aritmetiske og algebraiske uttrykk fleksibelt. Aritmetikk og regning på barnetrinnet støtter ofte opp under en operasjonell forståelse av likhetstegnet[7] og det er derfor viktig at lærerne er oppmerksomme på de andre betydningene av likhetstegnet, spesielt de relasjonelle betydningene, slik at elevene får utviklet denne forståelsen samtidig med den operasjonelle forståelsen[6].

IMPLIKASJONER: Å utvikle et operasjonelt syn på likhetstegnet kan føre til misoppfatninger hos elevene, for eksempel kan de tenke at bruken av likhetstegnet ikke er symmetrisk eller at likhetstegnet ikke kan brukes for likeverdige uttrykk. Det blir derfor viktig at man ikke utelukkende fokuserer på den operasjonelle bruken av likhetstegnet i undervisningen

3

Forskere har pekt på viktigheten av at man i læreplaner og undervisning bør sette søkelys på den relasjonelle betydningen av likhetstegnet[3] for å utvikle intuisjon omkring rekkefølge, mengde og endring[6]. Å oppmuntre til et relasjonelt syn på likhetstegnet allerede med de yngste elevene kan forhindre misoppfatninger. Elever som får undervisning som tydelig vektlegger relasjonell bruk av likhetstegnet viser bedre forståelse for likhetstegnet og gjør det bedre i arbeid med å løse likninger[8]. Små forskjeller i den tidlige innlæringen på denne måten kan føre til store forskjeller i elevers forståelse av grunnleggende matematiske ideer[9]. Et relasjonelt syn på likhetstegnet er grunnleggende for å forstå at endringer som skjer i prosessen med å løse en likning hele tiden opprettholder en ekvivalent relasjon[10]. Å lese symbolet som «er det samme som» er en nøkkel til en relasjonell forståelse[11].

IMPLIKASJONER: Å oppmuntre elevene til å utvikle et relasjonelt syn på likhetstegnet hjelper dem til å utvikle matematisk intuisjon knyttet til ekvivalens, bedre forståelse av likhetstegnet og evnen til å forstå prosessen med å løse likninger

Å lese symbolet som «er det samme som» hjelper til med å fremme et relasjonelt syn på symbolet

4

En solid forståelse av likhetstegnet (som både inkluderer relasjonelt syn og forståelsen for at hvis $x=3$ så kan x og 3 fritt bytte plass med hverandre)[12] er avgjørende for å lykkes med algebra[3]. En snever forståelse av likhetstegnet er en skikkelig snublestein for å lære og forstå algebra[13]. Mange av utfordringene elevene har innenfor tidlig algebra kan spores tilbake til «trangen til å regne ut»[14], med andre ord til et operasjonelt syn på likhetstegnet.

IMPLIKASJONER: Å utvikle en solid forståelse for likhetstegnet er avgjørende for å lykkes med å forstå og bruke algebra

Å oppmuntre elevene til å se likhetstegnet som mer enn bare et operasjonelt tegn kan forhindre problemer med algebra senere

"Fra et matematisk synspunkt er ikke likhetstegnet en instruks om å gjøre noe. Det er snarere et symbol for et veldig viktig forhold: at to uttrykk har lik verdi"

Darr, 2003[15]

"I USA blir likhetstegnet sjelden definert, og det blir ofte brukt synonymt med begrepet 'blir' i en beregning"

Jones et al, 2012[2]

Lucy Rycroft-Smith & Tabitha Gould, 2020. Norsk oversettelse: Ingunn Valbekmo, 2021

REFERENCES

1. Vincent, J., Bardini, C., Pierce, R., & Pearn, C. (2015). Misuse of the equals sign: An entrenched practice from early primary years to tertiary mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal, 29*, 31–39.
2. Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Dowens, M. (2012). Substitution and sameness: Two components of a relational conception of the equals sign. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*(1), 166–176.
3. Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 221–247.
4. Duncan, C. D. (2015). *A study of mathematical equivalence: The importance of the equal sign* [Master's thesis, Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College]. LSU Master's Theses, 398.
5. Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The equal sign: Teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 21*(2), 136–147.
6. Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87–115.
7. Prediger, S. (2010) How to develop mathematics for teaching and for understanding: The case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 73–93.
8. Powell, S. R. (2015). The influence of symbols and equations on understanding mathematical equivalence. *Intervention in School and Clinic, 50*(5), 266–272.
9. McNeil, N. M., Fyfe, E. R., Petersen, L. A., Dunwiddie, A. E., & Brletic-Shipley, H. (2011). Benefits of practicing 4 = 2 + 2: Nontraditional problem formats facilitate children's understanding of mathematical equivalence. *Child Development, 82*(5), 1620–1633.
10. Knuth, E. J., Alibali, M.W., Hattikudar, S., McNeil, N. M., & Stephens, A.C., (2008). The importance of the equal sign understanding in the middle grades. *Middle Teaching in the Middle School, 13*(9), 514–519.
11. Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317–326.
12. Jones, I., & Pratt, D. (2012). A substituting meaning for the equals sign in arithmetic notating tasks. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(1), 2–33.
13. Carpenter et al. (2003). In Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 221–247.
14. Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 149-167.
15. Darr, C. (2003). The meaning of "equals." *Set, 2*, 4–7.

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
UNIVERSITY OF CAMBRIDGE Faculty of Mathematics
UNIVERSITY OF CAMBRIDGE Faculty of Education
Cambridge Assessment