35. UTGAVE FEBRUARY 2021

CAMBRIDGE Mathematics

ESPRESSO DOPPIO

FILTRERT FORSKNING, FRA CAMBRIDGE MATHEMATICS

I SAMARBEID MED MATEMATIKKSENTERET

MatteLiST MATEMATIKKSENTERET

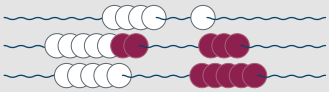
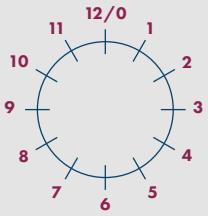
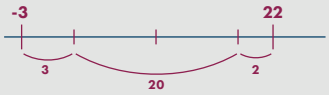
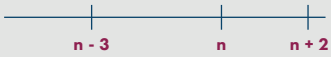
KAFFEPRAT:

HVA SIER FORSKNING OM BRUK AV TALLINJA?

OPPSUMMERING

- En tallinje er en romlig (som oftest lineær) representasjon av tall, som støtter matematisk forståelse, og den kan tydeliggjøre sammenhenger mellom måling, tall og statistikk
- Tallinja som representasjon kan bli en viktig modell for å forstå plassverdi og proporsjonal tenking. Tallinja er sannsynligvis intuitiv for unge elever
- Man kan effektivt vurdere elevenes matematiske kompetanse ved å la dem arbeide med oppgaver hvor de må estimere på tallinja
- Unge elever kan bruke perlesnor eller lineære tallstier (se illustrasjonen), som tidlige tallinjer, og deretter ta i bruk inndelte, strukturerte tallinjer
- Åpne tallinjemodeller regnes som fleksible. De gjør elevenes metoder og eventuelle feil synlige og åpner for et bredt spekter av strategier
- Å trene elevene i å bruke og konstruere tallinjemodeller, basert på deres intuitive, mentale tallinjer, støtter matematisk utvikling. Bruk av åpne tallinjer kan gi bedre forståelse av begreper
- Doble tallinjer kan være til hjelp i arbeid med proporsjonal tenking, spesielt når det gjelder skalering opp eller ned

Tallinja: En fleksibel og nyttig modell

Perlesnor / kuleramme	
Lineær tallsti	
Strukturert tallinje	
Sirkelformet / rund tallinje	
Åpen tallinje	
Dobbel tallinje	
Tallinje med variabler	

1

Tallinja kan knyttes til flere ulike modeller hvor man plasserer tall på (eller leser tall av) en linje, en lengde, en vekt eller en snor. Tallinja er en lineær, romlig representasjon. Den regnes som en viktig modell for å utvikle forståelse av sammenhenger mellom måling, tall og statistikk. Spesielt kan modellen egne seg når man skal sortere og plassere størrelser og data i koordinatsystemet,[2,3] og når man går fra arbeid med aritmetiske til algebraiske strukturer.[4] Å kunne bruke tallinja på en god måte er assosiert med godt utviklet forståelse av plassverdi og proporsjonalitet,[5] fordi det er en representasjon som gir muligheter for å resonnere omkring kontinuerlige størrelser.[6] Når elevene bruker tallinja som modell gjennom hele skoleløpet, kan de forstå mer av hvor mange tall som finnes på tallinja, fra hele tall, via desimaltall og rasjonale tall og til irrasjonale tall.[7]

IMPLIKASJONER: Tallinja er en modell som kan gi bedre matematisk forståelse og synliggjøre sammenhenger mellom måling, tall og statistikk

Å bruke tallinja kan øke forståelsen av tallverdi og proporsjonal tenking

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS & ASSESSMENT

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE Faculty of Mathematics

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE Faculty of Education

2

Forskning antyder at barn har en indre oppfatning av en tallinje med orientering (fra mindre til større) som følger den leseretningen de har lært.[8] Forskere er ikke helt enige om den tidlige, mentale tallinja er lineær (med like store mellomrom), logaritmisk (tallene kommer tettere når de blir større) eller ustrukturert og usystematisk inndelt.[9] Hvordan elevene presterer på oppgaver hvor de skal estimere på en enkel tallinje, har vist seg å samsvare godt med prestasjoner i telling, aritmetikk og standardiserte matematikkprøver. Slike oppgaver kan være et godt alternativ til å vurdere matematisk kompetanse, fordi de krever lite forkunnskap.[10] Å bruke en modell av tallinja på en god måte handler om å ta i bruk naturlige, mentale strukturer. For at tallinja skal kunne være et redskap for å resonnere, må den brukes i ulike situasjoner og sammenhenger. Den kan da gå fra å være en modell av det man gjør, til å bli en modell for tanken.[11]

IMPLIKASJONER: Det ser ut til at barn har en intuitiv forståelse av tallinjas struktur, med små tall til venstre og større tall mot høyre, hvis leseretningen de har lært, er fra venstre mot høyre, og vice versa

Oppgaver hvor elevene estimerer på tallinja, er effektive for å vurdere solid matematisk kompetanse

3

Små barn kan bruke fargede perler på en snor eller andre kulerammelignende strukturer inndelt i femmere eller tiere, for å støtte den romlige representasjonen av tall. Å gå fra å bruke slike konkrete representasjoner til å bruke tallinjer med punkter eller hakk er krevende,[13] og bør foregå parallelt med forståelse av lengde og avstand. Etter hvert kan elevene arbeide med strukturerte tallinjer (med noen tall avmerket), før man tar i bruk åpne tallinjer hvor elevene selv merker av tallene de trenger. Den åpne tallinja anbefales fordi den er en god modell for å synliggjøre regneoperasjoner og eventuelle feil.[14] Den viser godt uformelle regnestrategier, samtidig som den åpner for mer formelle og effektive strategier. Den åpne tallinja gir også muligheter for fleksibel bruk av mentale strategier. Den kan være viktig fordi den gir elevene mulighet og autonomi til å vise metodene sine.[16]

IMPLIKASJONER: Små barns arbeid med romlige representasjoner av tall kan støttes ved å bruke perlesnor eller lineære tallstier (se illustrasjonen)

En viktig, men utfordrende overgang er å gå fra å bruke tallstier til å bruke tallinjer (med punkter eller hakk)

Bruk av åpne tallinjer gjør elevenes strategier og feil mer synlige og gir elevene mulighet til selv å bestemme framgangsmåter

4

Det er bevist at det å la elevene trene på å bli mer kompetente brukere av tallinja, kan gi matematisk utvikling, spesielt innenfor aritmetikk. Lineære tallinjer fungerer bedre enn sirkulære, og øving kan gjerne være knyttet til spill eller lek.[17] Konstruksjon av en lineær tallinje gir elever allerede i første klasse muligheter til å løse et vidt spekter av matematikkproblemer på en god måte.[18] Doble tallinjer kan øke forståelsen av multiplikasjon og av at mengder kan være større enn en hel (på en dobbel tallinje gir det for eksempel mening å finne 125 %).[19] Bruk av åpne tallinjer, spesielt som redskap for additiv resonnering,[20] kan utvikle begrepsmessig forståelse og stadig mer effektive regnestrategier. Læreren er en viktig brikke i elevenes utvikling.[21] Læreren må tydeliggjøre sammenhenger mellom ulike framgangsmåter, og synliggjøre for elevene hvordan tallinjer kan brukes stadig mer effektivt.[22]

IMPLIKASJONER: For å støtte matematisk utvikling bør elevene øve på å konstruere tallinjer. Lineære tallinjer fungerer bedre enn sirkulære, også i spill

Doble tallinjer kan støtte proporsjonal tenking og belyse ideen om multiplikasjon som skalering

Å bruke åpne tallinjer, spesielt innenfor additiv tenking, kan gi begrepsmessig forståelse, men det avhenger av at læreren synliggjør bruken av dem for elevene

"Tallinja – et redskap som gir muligheter for å forstå tall som steder langs ei linje, og dermed tydeliggjør differanser mellom tall som differanse i romlig lengde – er matematisk enkel, men likevel veldig kraftfull"

Núñez, 2017[1]

"Den åpne tallinja er et kraftig redskap for å styrke kommunikasjonen i klasserommet"

Bobis, 2007[16]

Copyright © 2022 Cambridge Mathematics

Lucy Rycroft-Smith & Tabitha Gould, 2021. Norsk oversettelse: Ingunn Valbekmo, 2021

REFERENCES

1. Núñez, R. (2016). How much mathematics is "hardwired," if any at all: Biological evolution, development, and the essential role of culture. In M. D. Sera, S. M. Carlson, & M. Maratsos (Eds.), *Minnesota symposium on child psychology* (Vol. 38, pp. 83–124). John Wiley & Sons.
2. Gunderson, E. A., Ramirez, G., Beilock, S. L., & Levine, S. C. (2012). The relation between spatial skill and early number knowledge: The role of the linear number line. *Developmental Psychology, 48*(5), 1229–1241.
3. Metz, M. L (2010). Using GAISE and NCTM standards as frameworks for teaching probability and statistics to pre-service elementary and middle school mathematics teachers. *Journal of Statistics Education, 18*(3), 1–27.
4. Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87–115.
5. Moeller, K., Fischer, U., Nuerk, H.-C., & Cress, U. (2015). Computers in mathematics education – Training the mental number line. *Computers in Human Behavior, 48*, 597–607.
6. Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122–147.
7. Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line – where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(4), 477–488.
8. Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics.* Oxford University Press.
9. Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development, 75*(2), 428–444.
10. Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2018). Associations of number line estimation with mathematical competence: A meta-analysis. *Child Development, 89*(5), 1467–1484.
11. Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2014). The use of alternative double number lines as models of ratio tasks and as models for ratio relations and scaling. In S. Pope (Ed.), *Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education.* BSRLM.
12. Bobis, J., & Bobis, E. (2005). The empty number line: Making children's thinking visible. In M. Coupland, J. Anderson & T. Spencer (Eds.), *Making mathematics vital: Proceedings of the twentieth biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers* (pp. 66–72). AAMT.
13. Askew, M. (2016). *A practical guide to transforming primary mathematics: Activities and tasks that really work.* Routledge.
14. Bramald, R. (2000). Introducing the empty number line: The dutch approach to teaching number skills. *Education 3-13, 28*(3), 5–12.
15. Beishuizen, M. (2010). The empty number line. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (2nd ed., pp. 174–187). McGraw-Hill Education.
16. Bobis, J. (2007). The empty number line: A useful tool or just another procedure? *Teaching Children Mathematics, 13*(8), 410–413.
17. Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games – but not circular ones – improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology, 101*(3), 545–560.
18. Case, R., Okamoto, Y., Griffin, S., McKeough, A., Bleiker, C., Henderson, B., Stephenson, K. M., Siegler, R. S., & Keating, D. P. (1996). The role of central conceptual structures in the development of children's thought. *Monographs of the Society for Research in Child Development, 61*(1/2), i–295.
19. Orrill, C. H., & Brown, R. E. (2012). Making sense of double number lines in professional development: Exploring teachers' understandings of proportional relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 381–403.
20. van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.). (2001). *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school.* Sense Publishers.
21. Kaufmann, S., & Wessolowski, S. (2014). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine [Mathematical learning disabilities. Diagnosis and building blocks of intervention].* Klett/Kallmeyer.
22. Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children.* Routledge.

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS & ASSESSMENT

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE Faculty of Mathematics

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE Faculty of Education